反復深化深さ優先探索を用いた最小費用流問題の解法

Algorithm of the Minimum Cost-Flow Problem by Using Iterative Deepening Depth-First Search

1541082　滝口 雄介
Yusuke TAKIGUCHI

指導教員　秋葉 知昭

In this study, I considered to treat the network of a transporting route problem. So, I proposed to solve the minimum cost flow problem by using iterative deepening depth-first search in order to find efficient route with reduction cost in the network.

１．緒　言

現在, 私たちの生活は, 電気通信網, 交通, 水道, インターネットなど多くのネットワークシステムの上に成り立っており，重要な社会インフラとなっている．特に国内のブロードバンドの利用者数は 2001 年以降急速に増加してきており，2004 年 1 月末時点で 1400 万加入を超えている[1]. これにより，通信回線は今や生活する上で必要不可欠なインフラの一つとなっている.

本研究では, ネットワークでの需要者（ユーザー）の需要量（流量）を設定し，その需要量を満たし，かつ，コストの安い経路を効率よく短時間で求めるための問題として経路探索に注目し，反復深化深さ優先探索を用いた Primal-Dual 法による最小費用流問題の解法を示す.

２．最小費用流問題と Primal-Dual 法

本研究では, ユーザーの需要量を設定し, その需要量を満たし, かつ, コストの安い経路を効率よく短時間で求めるために，最小費用流問題に注目し，Primal-Dual 法を用いた解法を考える.

2.1 最小費用流問題[2]

フローネットワーク（連結有効グラフ）形式のグラフについて考える. 最小費用流問題とは, 始点ノードsから終点ノードtに「もの」を配送するとき，どのルートを選べば最小のコストで運ぶことができるかという問題である．これを本研究における基本問題とする．m個のノードi，$j \in V$とn個のエッジ$(i,j) \in E$を持つグラフ$G = ((V, E, \mathbf{c}, \mathbf{u}))$と$G$の各エッジに関してのコスト$c_{ij}$と容量$u_{ij}$が与えられいるとき，最小費用流問題は次のように定式化される.

インデックス

i, j, k	：ノード番号$(i, j, k = 1,2, \dots, m)$

パラメータ

m	：ノードの個数
n	：エッジ数
q	：ネットワークの総流量
c_{ij}	：エッジ(i,j)のコスト
$\mathbf{c}$	：n次元ベクトル，$\mathbf{c} \equiv \{c_{12}, \dots, c_{m-1,m}\}$
u_{ij}	：エッジ(i,j)の容量の上限値
$\mathbf{u}$	：n次元ベクトル，$\mathbf{u} \equiv \{u_{12}, \dots, u_{m-1,m}\}$
d	：深さ探索制限の制限値

決定変数

x_{ij}	：ノードiからノードjまでの流量
$\mathbf{x}$	：n次元ベクトル，$\mathbf{x} \equiv \{x_{12}, \dots, x_{m-1,m}\}$

最小費用流問題モデル
目的関数$f(\mathbf{x})$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \ \rightarrow min$$

$$\text{s.t.} \ \sum_{j \in Suc} x_{ij} - \sum_{k \in Pre} x_{ki} = \begin{cases} q & (i = 1) \\ 0 & \text{その他} \\ -q & (i = m) \end{cases}$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} (i, j = 1,2, \dots, m)$$

2.2 Primal Dual アルゴリズム[3]

このアルゴリズムでは，流量が需要量より小さいフロー$\mathbf{x}$（0 フローでも良い）で，$\mathbf{x}$の費用が最小であるものを維持しながら反復を繰り返し，$\mathbf{x}$の流量が需要量と等しくなったときに終了する．各反復では，補助ネットワークを作り，その中でsからtへの有向パスを見つけて，それに沿ってフローをできるかぎり流す.

ただし，Primal-Dual 法は近似アルゴリズムであ

り，必ずしも最適解であるとは限らない．

３．反復深化深さ優先探索の適用

本研究では，最小費用流問題を解く際に Primal-Dual 法を使用し，探索方法に幅優先探索ではなく反復深化深さ優先探索を利用する．幅優先探索を用いると，増加パスを見つける探索が小さいネットワークの場合は問題ないが，ネットワークが大きくなればなるほど指数的に計算量が増加する問題がある. そこで本研究では, 反復深化深さ優先探索を利用し，コストの低いパスを反復しながら探索を行い，それ以外のパスは途中で探索を終了するように考える．

４．実験および考察

本実験ではコストの異なる同じ形状のネットワークのモデルに対して，反復深化深さ優先探索を用いた Primal-Dual 法と先行研究[4]である幅優先探索を用いた Primal-Dual 法を使用し，同じ需要量でどの程度費用を安くできたかを比較する．なお, 本研究での深さ制限は 2 と設定している．以下に実験に用いたモデルと結果を示す.

（1）ネットワークモデル 1

図 1 にネットワークモデル 1 のイメージ図を示す．ノードの数が 10 個でエッジの数が 18 本の比較的小規模なネットワークである．各エッジの数値はコスト, 容量を表しており, 各エッジに設定されている．

出力された結果を表 1，2 に示す.

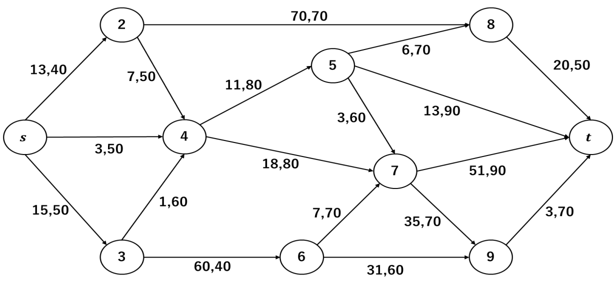

図 1　ネットワークモデル 1

表 1　計算結果（先行研究）

探索No.	ルート	流量	総コスト
1	1-4-7-10	50	7950
2	1→2→8→10	40	5760
3	1→4→7→10	30	5400
4	1→3→4→5→10	20	4510
合計		140	23620

表 2　実験結果（提案アルゴリズム）

探索No.	ルート	流量	総コスト
1	1→3→6→7→10	40	4200
2	1→3→4→5→7→10	10	1860
3	1→2→8→10	40	5760
4	1→4→7→10	40	6360
5	1→4→7→9→10	10	1930
合計		140	20110

実験した結果，提案アルゴリズムの方がコストが小さくなった. 理由としては, コストをランダムにすることで，遠回りしたほうが結果としてコストが低くなる場合が存在するからであると考えられる．

様々なネットワークモデルにおいて実験を行ったので，時間計算量の結果を表 3 に示す.

表 3　計算時間(秒)

ノード数,エッジ数	先行研究	本研究
ノード:25,エッジ:49	0.017	0.032
ノード:50,エッジ:82	0.022	0.023
ノード:63,エッジ:115	0.013	0.019

５．結言

本研究では，経路探索に注目し反復深化深さ優先探索を用いた. 実装した結果, 本研究の提案アルゴリズムに優位性が見られた。また, ネットワークを大きくし, 経路数を増やした場合, 先行研究と本研究との処理時間の差は小さくなった．これは途中で分枝限定法のようなことが実行されているからだと推測できる．しかし，Primal-Dual 法は近似解法であり，さらに安いルートが存在する可能性がある. 本実験では, 先行研究[4]との比較であり，全数列挙とは比較していないので，近似率は分かっていないものの, 実験した範囲であるが, 通常の Primal-Dual 法よりも安いルートを探索することができた.

本研究では，需要と供給が始点ノードと終点ノードの 2 点のみであったので，流通問題にも適用するため，途中にも需要供給ノードを設定することを今後の課題としたい.

文　献

[1]　総務省情報通信政策局情報通信経済室 : ネットワークの現状と課題に関する調査，総務省(2004)

[2]　玄光男，林林 : ネットワークモデルと多目的 GA，共立出版，pp.66-71 (2008)

[3]　安藤和敏：グラフとネットワーク，静岡大学工学部(2013)

[4]　権田裕太，秋山浩一：幅優先探索を用いた Primal-Dual 法による最小費用流問題の解法，千葉工業大学卒業論文(2004)